I Olimpiada Universitaria Mexicana de Matemáticas
Fecha: 8 de Junio de 2024

Nombre: ____________________________________

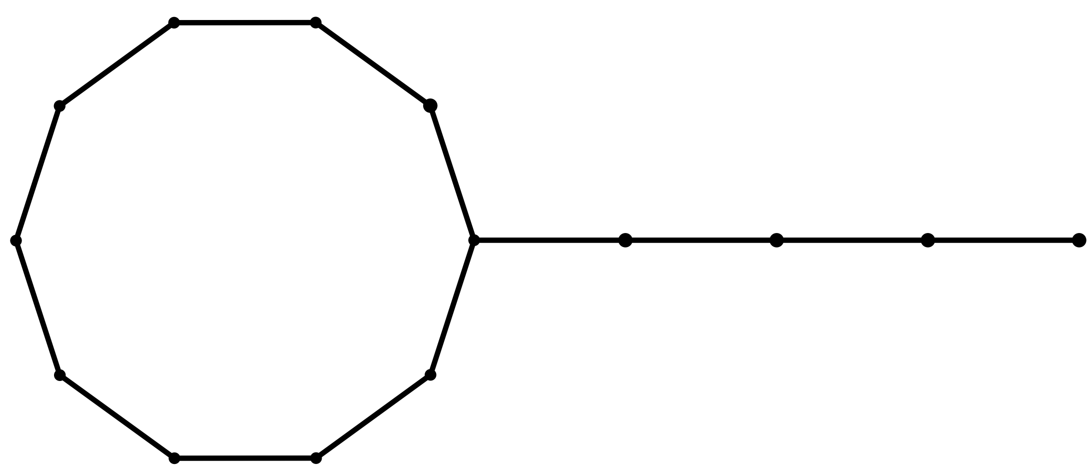
Instrucciones:
Tienes 4 horas para contestar el examen. El examen es individual, no se permite trabajarlo en equipo. Las respuestas deben ser tuyas únicamente y no debes buscar en internet. Tienes hasta las 14:15 (Hora CDMX) para subir tus respuestas escaneadas al classroom. ¡Éxito!

Problema 1. Demuestra que si $p(x)$ es un polinomio de grado n con coeficientes reales y con n raices reales distintas. Entonces el polinomio $(p^2)'(x)$ tiene $2n-1$ raíces reales distintas.

Problema 2. Sea A una matriz de $n \times n$ real, J la matriz de puros 1's de $n \times n$ y $f(t) = det(J + tA)$. Encuentra $f'(0)$.

Problema 3. Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un arreglo de 0's y 1's. Considera la función $\rho(\mathbf{x}) = \rho(x_1, \ldots, x_n) = (x_2, \ldots, x_n, x_1)$ que mueve la primera entrada al final. Sea $u = \#\{i | x_i = 1\}$ y $v = \#\{i | x_i = 0\}$ la cantidad de unos y ceros de $\mathbf{x}$ respectivamente. Sabiendo que $|u - v| = 1$ demuestra que $\rho^t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ si y sólo si $n|t$.

Problema 4. Consideremos un grafo $G(n, m)$ que se obtiene de identificar un vértice de un ciclo de n aristas con un extremo de un camino de m aristas. La siguiente figura muestra el grafo $G(10, 4)$.



Un conjunto de vértices se dice bueno, si no hay dos de ellos que sean vecinos (que compartan una arista). Sea $f(n, m, k)$ el número de conjuntos buenos de tamaño k de $G(n, m)$. Encuentra $f(n, m, k)$.

Problema 5. Encuentre todas las funciones $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ que satisfacen que:

1. $f(xy) = f(x)f(y)$
2. $f(f(x)) = x^4$
3. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$