Instrucciones:
Tienes 4.5 horas para contestar el examen, de las cuales, la primera hora puedes hacer preguntas sobre la redacción del examen. ¡Éxito!

Problema 1. Sean x, y, p enteros positivos que cumplen la ecuación $x^4 = p + 9y^4$, donde p es un número primo. Muestra que $(p^2 - 1)/3$ es un cuadrado perfecto y múltiplo de 16.

Problema 2. Sean A y B dos matrices cuadradas con entradas complejas tales que $A + B = AB$, $A = A^*$ y A tiene todas sus valores propios distintos. Demuestra que existe un polinomio P con coeficientes complejos tales que $P(A) = B$.

Problema 3. Considera una función multiplicativa f de los enteros positivos al disco unitario con centro en el origen, es decir, $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}$ tal que $f(mn) = f(m)f(n)$. Demuestra que para todo $\epsilon > 0$ y todo entero $k > 0$ existen k enteros positivos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tales que $mcd(a_1, a_2, \ldots, a_k) = k$ y $d(f(a_i), f(a_j)) < \epsilon$ para todo $i, j = 1, \ldots, k$.

Nota. En el enunciado, $mcd(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ es el máximo común divisor de los enteros $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Y el símbolo $d(x, y)$ denota la distancia euclideana entre x e y.

Instrucciones:
Tienes 4.5 horas para contestar el examen, de las cuales, la primera hora puedes hacer preguntas sobre la redacción del examen. ¡Éxito!

Problema 4. Dado $b > 0$, considera la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} b & b^2 \\ b^2 & b^3 \end{pmatrix}$$

Denotemos con e_i a la entrada superior izquierda de B^i. Demuestra que el siguiente límite existe y calcula su valor:

$$\lim_{i\to\infty} \sqrt[i]{e_i}.$$

Problema 5. Considera dos sucesiones finitas de número reals $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Denotemos por $\alpha(x) = \#\{i|a_i = x\}$ y $\beta(x) = \#\{i|b_i = -x\}$. Demuestra que existe una permutación $\sigma \in S_n$ (el grupo simétrico de n elementos) tal que $a_{\sigma(i)} + b_i \neq 0$ para toda $i = 1, \ldots, n$ si y sólo si $\alpha(x) + \beta(x) \leq n$ para toda $x \in \mathbb{R}$

Problema 6. Sea p un polinomio mónico con raices reales distintas. Muestra que existe K tal que

$$(p(x)^2)'' \leq K(p'(x))^2.$$